ECUACIONES E INECUACIONES

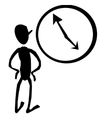
1. INTRODUCCIÓN

<u>¿ Qué son?</u>

Las ecuaciones y las inecuaciones son expresiones matemáticas que representan problemas reales , por ejemplo :

> *" ¡Que carero es el tío del quiosco!, he salido de casa con 300 pelas , me he comprado dos paquetes de chicles y ya sólo me quedan diez duros "*

No os costara mucho saber cuánto dinero le queda.
(dos horas después)

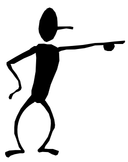


Efectiviwonder cada paquete le costó 125Ptas. Habéis resuelto una ecuación de primer grado.

La ecuación que representa matemáticamente el problema anterior es:

$$2x + 50 = 300$$

Para resolverla de forma matemática hay que seguir una serie de pasos (que son seguramente los mismos que habéis seguido para resolverla mentalmente) .Vamos a recordar dichos pasos un poco más adelante.



Al valor obtenido (125) se le llama solución de la ecuación y es el único valor posible que concuerda con la ecuación de primer grado propuesta.

Si la ecuación fuese de segundo grado la cosa cambia un poco pues hay una "fórmula" que nos da las soluciones, que en el caso de ecuaciones de 2º grado son dos. Es decir , en una ecuación de 2º grado los valores que concuerdan con lo que dice la ecuación son dos y sólo dos.

En una ecuación de tercer grado hay tres soluciones , en una de cuarto grado hay cuatro soluciones, etc…

***El número de* soluciones de una ecuación coincide con el grado de dicha ecuación**

Pero, ¿y las inecuaciones? .

La diferencia más clara es que en inecuaciones se usan símbolos del tipo > , < , $\le$ y $\ge$

Su significado es parecido al de las ecuaciones lo que ocurre es que son menos concretas, pues ,en general , las soluciones de una inecuación (del grado que sean, da igual) no van a ser ni una , ni dos , ni tres. Pueden incluso ser infinitas. Por ejemplo:

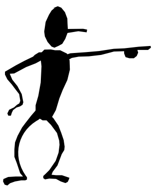
> ***"Una mesa mide 140 centímetros. La mido con la palma de mi mano y con seis palmos me quedo corto"***

¿ que se puede saber de la longitud de mi mano?
Evidentemente con estos datos no se puede saber cuanto mide mi mano .Pero si se puede saber una cosa, que esta longitud tiene que ser por narices, menos que $^{140}/_{6}$ =23,3 cm , (simplemente pensando que seis veces mi mano es mas corto que los 140 cm de la mesa).

Este problema se puede plantear como la inecuación de primer grado:

$$6x < 140; \quad \text{luego} \quad x < {}^{140}\!/_{6} \Rightarrow x < 23.3 .$$

Los métodos para despejar la incógnita son iguales que los usados para resolver la ecuación de primer grado (excepto un pequeño , pero importante , detalle . que veremos más adelante)



El significado de las soluciones ahora cambia y se puede interpretar diciendo que la palma de mi mano(que es la incógnita x) puede tener cualquier longitud menor que 23,3cm ($x < 23{,}3cm$) , puede ser 23,1cm o 22cm o 22,5cm o 17cm o 19,546cm , etc….Vemos que hay realmente infinitas posibilidades.

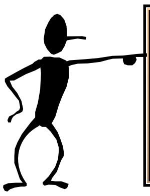
También hay una diferencia a la hora de expresar las **soluciones**

¿Cómo nos lo montamos para indicar que los números que verifican la inecuación pueden ser 23,2 o 23,15 o 23,00512 ……… y muchos otros más? (todos los números más pequeños que 23,3)

La única forma de expresar correctamente las soluciones de una inecuación es usar intervalos que indicaran desde donde hasta donde se encuentran los valores que son las soluciones .

En el ejemplo anterior las soluciones pueden ser (en teoría) cualquier número comprendido entre $-\infty$ y 23,3 que en forma de intervalo es $(-\infty\ ,\ 23{,}3)$.
En la práctica una mano no puede medir 0cm , ni tampoco –2cm , pero esa es otra historia que tiene que ver con el hecho de que ciertos problemas no se acaban cuando se encuentra la solución de la ecuación o inecuación correspondiente. A veces se necesita un paso más : la interpretación de los resultados.

Sistemas de inecuaciones
Los sistemas de inecuaciones son un poco diferentes a los sistemas de ecuaciones.



En los sistemas de inecuaciones vamos a encontrarnos con dos inecuaciones de primer grado. Resolver el sistema consiste en encontrar los valores que verifican a la vez ambas ecuaciones

Por ejemplo en el problema de la mesa , aunque no se dice nada podemos suponer que con siete palmos se sobrepasa la longitud de la mesa. Es decir, siete veces mi palmo es mayor que 140cm.,lo que nos lleva a la siguiente inecuación: $7x > 140 \Rightarrow x > {}^{140}\!/_{7} \Rightarrow x > 20$

Podemos plantear entonces el siguiente sistema de inecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 6x < 140 \\ 7x > 140 \end{array}\right.$

Las soluciones de cada inecuación por separado son, como ya sabemos $\left\{\begin{array}{l} x < 23{,}3 \\ x > 20 \end{array}\right.$

Las soluciones del sistema serán aquellos números que verifiquen a la vez ser " menores que 23,3" y "mayores que 20" , es decir , que verifican las dos soluciones individuales. A veces no existe solución ;supongamos por ejemplo que nos sale que x >3 y x< 3, no hay ningún número que sea , a la vez, mayor que 3 y menor que 3.
Pero en nuestro caso si hay solución y serán los **números comprendidos entre 20 y 23,3 .**

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Veamos como resolver una ecuación de primer grado con algunos ejemplos prácticos. Se irán describiendo en los ejemplos los pasos que se van dando.

Supongamos la siguiente ecuación de primer grado:

$$\mathbf{x - \frac{x-3}{3} + \frac{x}{2} = \frac{1}{7}\left[-5(x-1) + x\right]}$$

- En primer lugar debemos **"quitar los paréntesis o corchetes"** , si es que existen. Para ello: operamos dentro de ellos **(1)** y hacemos las operaciones asociadas externas(algo que multiplique o divida al paréntesis)...

- Ahora debemos **"quitar denominadores"** Para ello hacemos la suma de las fracciones que aparecen, podemos hacerlo de varias formas: **(2)** **o (3)**

- Por último **operamos** y **separamos a un lado de la igualdad las incógnitas y al otro los números** (recordemos que lo que suma pasa restando y viceversa).

(1)

$$x - \frac{x-3}{3} + \frac{x}{2} = \frac{1}{7}\left[-5x - 5 \bullet (-1) + x\right]$$

$$x - \frac{x-3}{3} + \frac{x}{2} = \frac{1}{7}\left[-4x + 5\right];$$

$$x - \frac{x-3}{3} + \frac{x}{2} = \frac{-4x+5}{7};$$

(2)Cada lado de la igualdad por separado

$$\frac{6x - 2\cdot(x-3) + 3x}{6} = \frac{-4x+5}{7};$$

$$\frac{6x - 2x + 6 + 3x}{6} = \frac{-4x+5}{7};$$

$\frac{7x+6}{6} = \frac{-4x+5}{7}$ **el 6 y el 7 que dividen pasan al otro lado de la igualdad multiplicando**

$$7\cdot\left[7x+6\right] = 6\cdot\left[-4x+5\right];$$

$$49x + 42 = -24x + 30$$

(3) buscamos el común denominador en ambos lados de la igualdad

$$\frac{42x - 14\cdot(x-3) + 21x}{42} = \frac{-24x+30}{42};$$

$$42x - 14x + 42 + 21x = -24x + 30;$$

$$42x - 14x + 21x + 24x = 30 - 42;$$

Por último despejamos la incógnita $73x = -12$ obteniéndose $\boxed{x = \frac{-12}{73}}$

3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ya sabemos que toda expresión del tipo ***$ax^2 + bx + c=0$*** (donde a, b y c son números) es una ecuación de segundo grado. Resolver esta ecuación consiste en encontrar los valores de x que hacen que la expresión sea cierta .

Por ejemplo en la ecuación de segundo grado $x^2-2x-3=0$ las soluciones son los números $x =-1$ y $x =3$ pues son los únicos que al sustituirlos en x^2-2x-3 hacen que esa expresión sea igual a cero . Veámoslo :

Si $x = -1$ es $(-1)^2 - 2\bullet(-1) - 3 = 1+2-3=0$

Si $x = 3$ es $(3)^2 - 2\bullet(3) - 3 = 9-6-3=0$

Para calcular estos valores basta con aplicar la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Mucho cuidado pues al sustituir a, b y c por los valores correspondientes hay que tener en cuanta los signos de estos.

En la ecuación : $x^2-2x-3=0$ son :

- ***a =1***(aunque no haya ningún número que acompañe al x^2 se supone que hay un 1 delante).
- ***b = -2***
- ***c = -3***

Según esto tenemos que

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\bullet 1\bullet(-3)}}{2\bullet 1};$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \qquad x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{2+4}{2}; x = \frac{6}{2} \qquad \boxed{x = 3}$$

$$x = \frac{2-4}{2}; x = \frac{-2}{2} \qquad \boxed{x = -1}$$

ECUACIONES INCOMPLETAS DE SEGUNDO GRADO

Ciertas ecuaciones de segundo grado se resuelven con otros métodos distintos del anterior , son aquella en las que falta bien bx o bien c de la ecuación $ax^2+ bx + c=0$
(no viene al caso que falte ax^2 pues entonces no es una ecuación de segundo grado) Tendremos entonces que:

- **Si falta bx es $ax^2 + c = 0$** ; $ax^2 = -c$; $x^2 = \dfrac{-c}{a}$; $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

  Por ejemplo $2x^2 - 1 = 0$; $2x^2 = 1$; $x^2 = \dfrac{1}{2}$; $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

- **Si falta c es $ax^2+bx = 0$** ; $x \bullet (ax + b) =0$ dos posibilidades: Bien $\boxed{x = 0}$ o bien es $ax + b = 0$, es decir $\boxed{x= -b/a}$

  Por ejemplo $x^2 - 2x = 0$; $x \bullet (x-2) = 0$

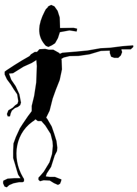
  Entonces bien $\boxed{x = 0}$ o bien $(x-2) = 0$; $\boxed{x = 2}$

4. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ya sabemos que para resolverlas hay que aplicar los mismos pasos que para resolver ecuaciones . Hagamos alguna

$\frac{51x-13}{4}+2x \le 15x+1$; $\frac{(51x-13)+4 \bullet 2x}{4} \le \frac{4 \bullet (15x+1)}{4}$; $51x-13+8x \le 60x+4$;
$59x-13 \le 60x+4$; $59x-60x \le 4+13$; $-1x \le 17$;

Aquí está la única diferencia con el modo de trabajar en la ecuaciones . En una ecuación cambiaríamos sencillamente el signo y ya está.
Pero en inecuaciones esto va a implicar algo más.



Cuando en una inecuación la incógnita tiene un signo negativo se lo cambiamos (por que nosotros queremos saber los valores de x no de -x) pero ese cambio de signo implica además el cambio del símbolo de la inecuación.

En el caso que nos ocupa $-x \le 17$ luego será $x \ge -17$. Esta es la solución de la inecuación, escrita en forma de intervalo será [17 , +∞) , es decir , todos los números mayores que 17 y también el 17.

SISTEMAS DE INECUACIONES

Un sistema de inecuaciones no es más que una pareja de inecuaciones de primer grado que deben cumplirse a la vez

Según esto resolver el sistema consiste simplemente en resolver , por separado, cada inecuación de primer grado y luego comparar las soluciones para buscar sólo aquellas que cumplan las dos inecuaciones ala vez.

Si tenemos el sistema $\begin{cases} 3x<6 \\ x-1>0 \end{cases}$ las soluciones son $\begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$

Tenemos por un lado los números menores que dos y por otro los números mayores que uno . **Las soluciones del sistema serán sólo los números que sean , a la vez , menores que dos y mayores que uno** . Estos números son los comprendidos entre uno y dos .

la solución del sistema es pues el intervalo (1, 2)

5. ESTUDIO DE SIGNOS

Las inecuaciones se usan a veces para conocer los valores que hacen que una expresión sea positiva o negativa.

El caso más sencillo es el siguiente : *"Para que valores es positivo x"*

La respuesta es sencilla : cuando $x>0$

Pero se puede hacer la misma pregunta para expresiones del tipo (x–a), por ejemplo:

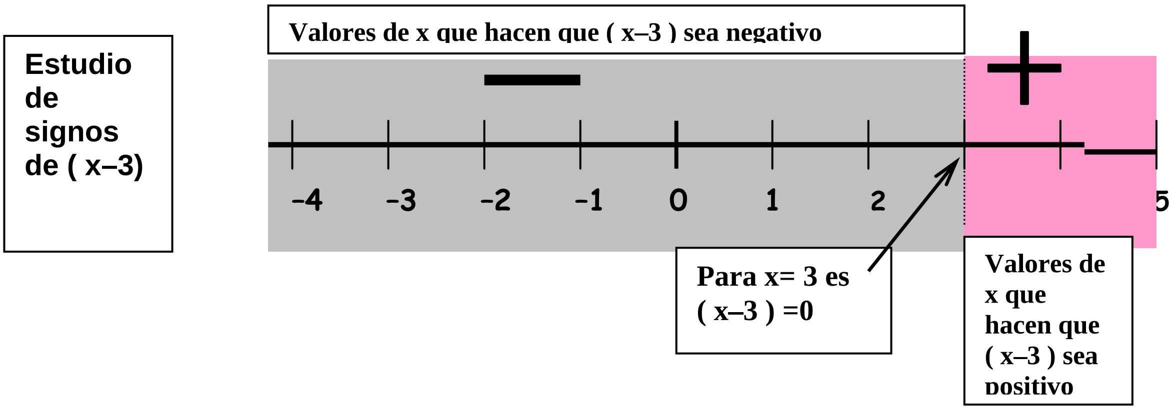
"¿Para que valores de x es positiva la expresión (x–3)?"

Se pueden ver "a ojo" muchos valores que responden a esa cuestión , x = 5, x=3,5….. y muchos otros .**En realidad la pregunta queda completamente respondida si resolvemos la inecuación $x-3>0$ cuya solución es $x>3$, o en forma de intervalo (3, +∞).**

Según esto la expresión (x–3) es positiva para todos los valores que estén dentro del intervalo (3, +∞) .

Vemos que resolver la inecuación $(x-3)>0$ nos ha dado la información que buscábamos , pero no sólo eso pues nos ha informado también de cuándo (x–3) es negativo. Es lógico que será negativo cuando no sea positivo luego , como $x>3$ son los valores que hacen positivo (x–3) , entonces para los $x<3$ será (x–3) negativo (y por supuesto para $x=3$ es $(x-3)=0$)

Podemos ver esto gráficamente



El estudio de signos de expresiones del tipo (x–a) se usa además como herramienta para poder resolver inecuaciones de segundo grado.

6. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Este tipo de inecuaciones son de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, o con los símbolos $\leq o \geq o >$

Para resolverlas hay que factorizar el polinomio de segundo grado, es decir , encontrar los valores que permiten escribir el polinomio como producto de factores del tipo (x–a). Factorizar un polinomio de 2º grado es muy fácil , basta con saber que los números buscados son las soluciones del polinomio.

Por ejemplo , si el polinomio es x^2-6x+8 , entonces aplicando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obtenemos que sus soluciones son :x = 2 y x = 4 . Esto quiere decir que :

$$\mathbf{x^2-6x+8 = (x-2)\bullet(x-4)}$$

Supongamos que queremos resolver la inecuación de 2ºgrado: $x^2 - 6x + 8 \leq 0$
El problema se puede afrontar desde el siguiente punto de vista ¿qué valores de x hacen que x^2-6x+8 tome un valor negativo o cero(≤ 0).

Vemos que el problema se puede plantear desde el punto de vista de un estudio de signos .Pero la expresión x^2-6x+8 ,tal cual , no nos permite hacer nada ; por eso la factorizamos , la escribimos de forma más conveniente para estudiar los signos.

Al factorizarla tenemos que la inecuación se puede escribir ahora
$(x-2)\bullet(x-4) \leq 0$
Que se puede traducir diciendo " el producto de (x–2) por (x–4) debe ser un número negativo o cero".

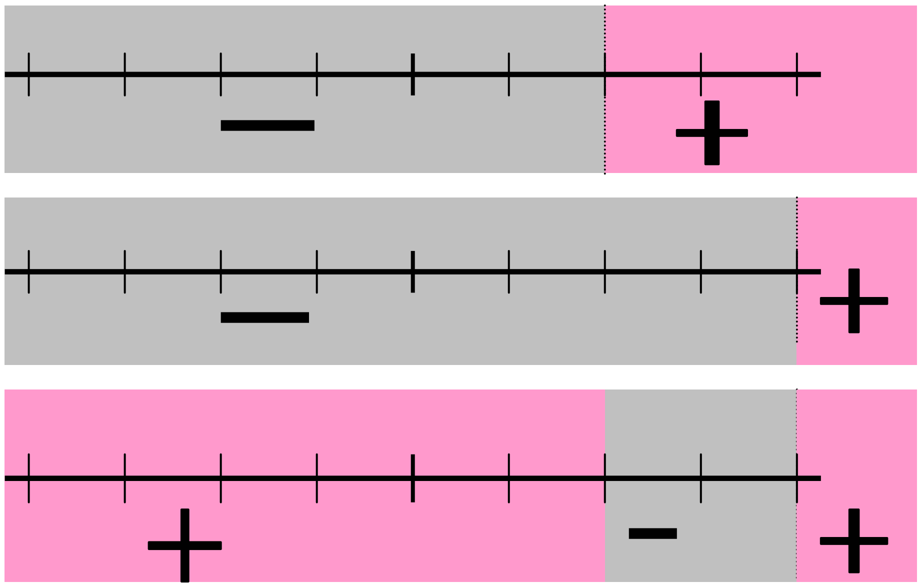
Teniendo en cuenta las reglas de los signos en la multiplicación sabemos que para que un producto de dos cosas sea negativo estas dos deben tener signos distintos

Bien , pues eso es lo que tenemos que hacer para resolver la inecuación de 2º grado. Estudiamos los signos de los factores por separado (como se explicó en la página anterior) y luego los comparamos y buscamos aquellas zonas donde los signos de los factores son distintos

Signos de (x–2)

Signos de (x–4)

Signos del producto
(x–2)•(x–4)



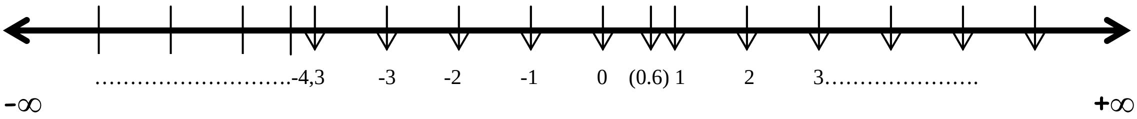
Buscamos los valores que hacen $(x-2)\bullet(x-4)\leq 0$ que son los del intervalo[2 ,4].

Es fácil ver la certeza de este resultado , por ejemplo si tomamos el valor x= 3 que está dentro de [2 , 4] . Para este valor es x–2>0 (pues 3–2 = 1) y (x–4)<0 (pues 3–4=–1) luego el producto (x–2)•(x–4) para x=3 es + por – = – (numéricamente 1•(–1)= –1<0)

Si la inecuación hubiera sido $(x-2)\bullet(x-4)>0$ la respuesta vendría dada por las zonas donde (x–2) y (x–4) tienen el mismo signo $(-\infty,2)\cup(4,\infty)$

Anexo I. INTERVALOS EN LA RECTA REAL______

Podemos representar los números reales sobre una recta graduada en la que cada punto se corresponderá con un número real:



> Cuando queremos seleccionar unos determinados valores , comprendidos entre dos, usamos **intervalos.**

Por ejemplo supongamos que me interesa expresar de alguna forma todos los números positivos, es decir , todos los que son mayores que cero. Si miramos la recta real vemos que todos esos números están comprendidos entre el cero y el infinito (+∞) , el intervalo correspondiente sera (0 , +∞) que representa al conjunto de números que nos interesaban ,los que están comprendidos entre 0 e infinito , es decir ,los positivos.

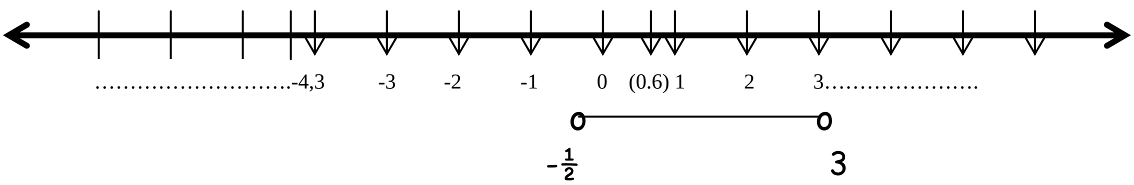
A los números que aparecen se les llama extremos del intervalo y puede que también queramos que formen parte de los números seleccionados (aunque -∞ +∞ no son realmente números luego nunca van a poder ser seleccionados)

Hay varios tipos de intervalos :

- **Abiertos** : Aquellos en los que los extremos no forman parte de los números seleccionados

Ejemplo :

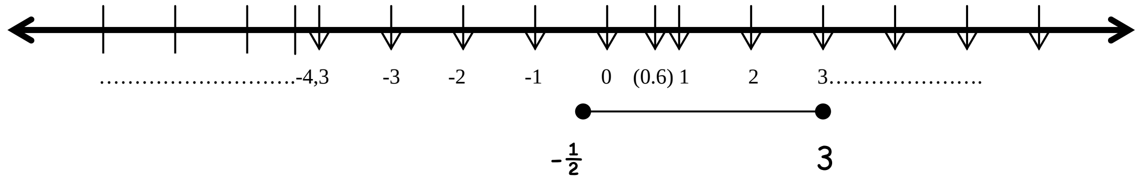
El intervalo $\left(-\frac{1}{2},3\right)$ ***todos los números desde*** $-\frac{1}{2}$ ***hasta 3, pero ni*** $-\frac{1}{2}$ ***ni 3***



- **Cerrados** : Aquellos en los que los extremos si forman parte de los números seleccionados (para indicar esto usaremos corchetes en lugar de paréntesis)

Ejemplo:

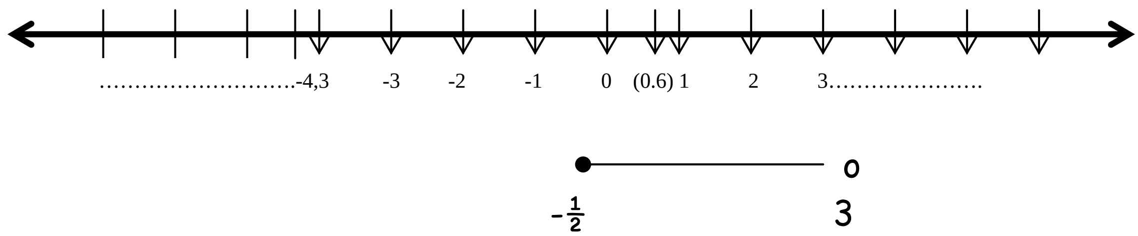
El intervalo $\left[-1/2\,,3\right]$ ***todos los números desde*** $-\dfrac{1}{2}$ ***hasta 3, incluidos*** $-\dfrac{1}{2}$ ***y 3***



- **Semiabiertos :** Aquellos en los que uno de los extremos si forman parte de los números seleccionados y el otro no (para indicar esto usaremos un corchete junto al que si queremos y un paréntesis junto al que no)

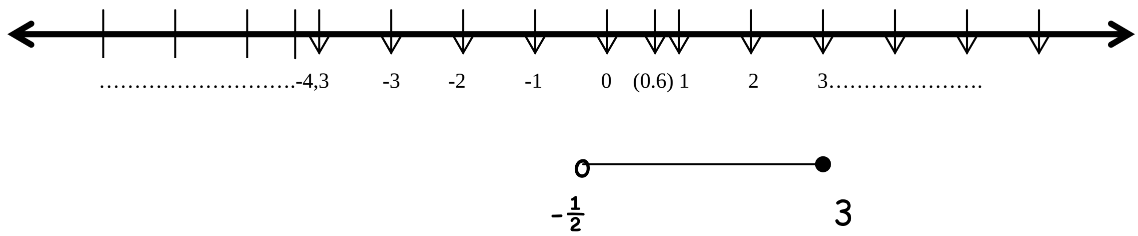
Ejemplos:

(1) El intervalo $\left[-1/2\,,3\right)$ ***todos los números desde*** $-\dfrac{1}{2}$ ***hasta 3, incluido*** $-\dfrac{1}{2}$ ***pero sin incluir al 3.***



O bien

(2) El intervalo $\left(-1/2\,,3\right]$ ***todos los números desde*** $-\dfrac{1}{2}$ ***hasta 3, incluido el 3 , pero sin incluir al*** $-\dfrac{1}{2}$ ***.***



CUESTIONES:

¿Cómo representarías todos los números comprendidos entre 2 y 5?

Dado el intervalo (-3 , ½] di , cuales de los siguientes números están dentro de ese intervalo y cuales no:

2,45 -3 -1/2 -0.8 0.2 ½ 3 1,3

Representa en un intervalo el rango de las horas que te pasas viendo la tele(algunos días la verás más y otras menos)

EJERCICIOS :

1. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado y sistemas

a. $(x-3)-\frac{1}{2}\geq 3$

b. $2x-5<5x+4$

c. $\frac{3x-1}{2}+\frac{x}{3}\leq 3x-\frac{x}{2}$

d. $\frac{\left[x-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]}{3}+2x\geq x-1$

e. $\begin{cases}3x-1<2\\ x>0\end{cases}$

f. $\begin{cases}-x+2\leq 2\\ 2x-3<3\end{cases}$

expresa las soluciones también con intervalos

2. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado

a. $x^2+2x-3<0$

b. $x^2-4\geq 0$

c. $(x-1)\bullet(x+\frac{1}{2})>0$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

1a $x\geq\frac{13}{2}$ **1b** $x>3$ **1c** $x\geq\frac{3}{4}$ **1d** $x\geq\frac{-4}{7}$ **(aquí no pongo los intervalos , averígualos tú)**

1e el intervalo (0,1)

1f el intervalo [0 , 3)

2a (-3, 1)

2b $(-\infty,-2\;]\cup[2,\infty)$

2c $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,\infty)$